1) Ako je f Riman integrabilna, tada je f Lebeg integrabilna i važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} fdm.$$

2) Funkcija f je Riman integrabilna, ako i samo ako je skup prekida funkcije f mere 0.

Dokaz: Neka je $P(n)$ podela intervala $[a,b]$ data sa:

$$x_0 = a < x_1 < ...x_n = b, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, ..., n,$$

$$m_k = \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\},\ M_k = \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$g_{P(n)} = \sum_{k=1}^{n} m_k \kappa_{[x_{k-1},x_k]}, \quad G_{P(n)} = \sum_{k=1}^{n} M_k \kappa_{[x_{k-1},x_k]},$$

$$s_{P(n)} = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \quad S_{P(n)} = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Neka se podele $P(n)$ profinjuju kad $n \in \mathbf{N}$, raste. Sledi

$$g_{P(n)} \le g_{P(n+1)} \le f \le G_{P(n+1)} \le G_{P(n)},\ n \in \mathbf{N}. \tag{7.1}$$

Neka je

$$\lim_{n\to\infty} g_{P(n)}(x) = g(x),\ \lim_{n\to\infty} G_{P(n)}(x) = G(x),\ x \in [a,b].$$

Navedeni limesi postoje na osnovu (7.1) Jasno, g i G su merljive i važi $g \le f \le G$. Koristićemo sledeće jednostavne jednakosti:

$$s_{P(n)} = \int_a^b g_{P(n)}(x)dx = \int_{[a,b]} g_{P(n)}dm, \tag{7.2}$$

$$S_{P(n)} = \int_a^b G_{P(n)}(x)dx = \int_{[a,b]} G_{P(n)}dm. \tag{7.3}$$

Iz (7.1), na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi

$$\int_{[a,b]} g_{P(n)}dm \to \int_{[a,b]} gdm,\ \int_{[a,b]} G_{P(n)}dm \to \int_{[a,b]} Gdm.$$